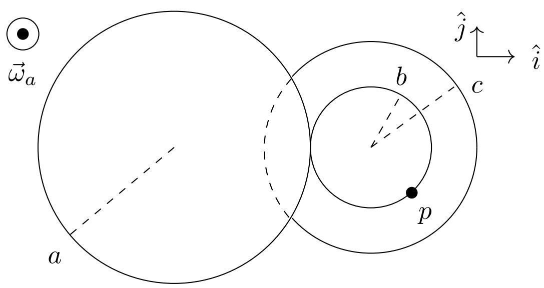
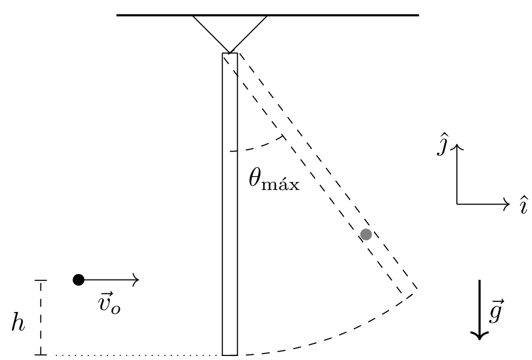
Universidad Simón Bolívar

Generadores de Conocimiento GECOUSB

GUÍA DE EJERCICIOS

Física II (FS-1112)





Primera Edición
Última modificación: 10 de junio del 2020

Prefacio

La presente guía es una recopilación de ejercicios prácticos del curso de Física 2 (FS-1112) del último trimestre del Ciclo Básico de la materias de ingeniería y ciencias (menos licenciatura en biología). Los ejercicios planteados son extraídos de la Guía del Departamento de Física, la Guía del prof. Cayetano Di Bartolo, los libros titulados *Sistema de Partícular* y *Fluidos y Termodinámica* del prof. Douglas Figueroa, y parciales anteriores del curso, o propuestos por profesores y el equipo de GECOUSB.

Es importante denotar que no es una guía teórica. Se tiene por supuesto que el usuario ha revisado el contenido de la materia descrito por su profesor y maneja efectivamente tal información. De todas formas, se recomiendan, además de la bibliografía convencional, los videos del prof. José Calatroni presentes en CanalUSB y del prof. Cesar Izquierdo en su respectivo canal de Youtube. Por otro lado, en ciertos ejercicios, se utilizarán los conceptos de coordenadas esféricas y cilíndricas, y la notación matricial para vectores.

La intención es que el estudiante resuelva los ejercicios planteados y revise los resultados en la solución anexada. Sin embargo, también puede utilizarse para observar los diversos métodos para utilizar los conocimientos adquiridos y resolver ejercicios de naturaleza semejante. Se recomienda la revisión de los ejercicios resueltos por el prof. Douglas Figueroa en sus libros *Sistema de Partícular* y *Fluidos y Termodinámica* puesto que no se presentaran ejercicios con el mismo razonamiento en la presente guía.

Nota: Esta guía fue digitalizada por Asxel Ramirez para GECOUSB.

Asxel Ramirez
18-10322
Lic. Química
Twitter: @asx.0088

gecousb.com.ve
Twitter: @gecousb
Instagram: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com

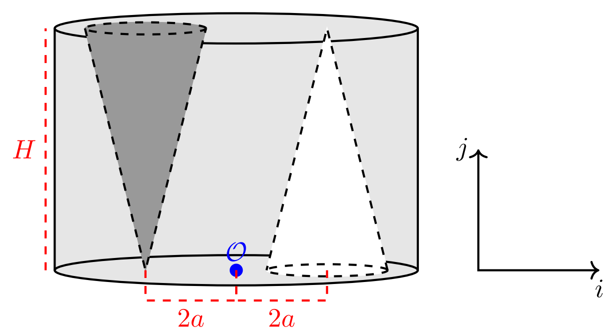
Parte I

Primer Parcial

1

Sistema de partículas

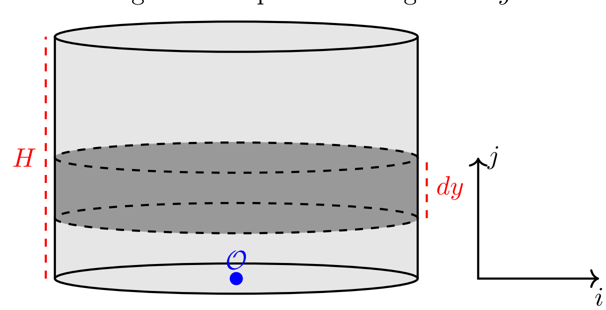
§§ Sea un cilindro de radio **5a**, altura **H** y densidad ρ_o al que se la ha hecho un hueco en forma de cono triangular de radio **a** y se le ha insertado un objeto en forma de cono circular de radio **a** y del mismo material que el cilindro pero tres veces su densidad. Si ambos conos tienen un ángulo de ápice de 2θ, determine la posición del centro de masa (CM) del objeto considerando la distribución que muestra la siguiente figura.



SOLUCIÓN

Lo primero que hacemos es determinar el CM del cilindro sin alterar y de cada cono circular.

Cilindro: Situamos el eje de coordenadas en el punto $\mathcal{O}$. Dividimos el cilindro en una serie de discos infinitesimales de igual radio pero con un grosor dy.



Sabemos que

$$\vec{\mathcal{R}}_1 = \frac{1}{m_1}\int \vec{\mathbf{r}}dm$$

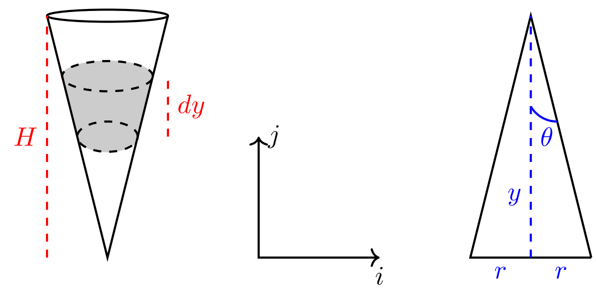
Debido a la simetría del cilindro, podemos asegurar que su centro de masa está en el eje j. Así, si y es la distancia desde el punto $\mathcal{O}$ hasta el del cilindro infinitesimal CM, tenemos que

$$\vec{\mathcal{R}}_1 = \frac{1}{m_1}\int ydm\hat{\mathbf{j}}, \quad m_1 = \int dm$$

Por otro lado, sabemos que $dm = \rho_o dV$ con $dV = \pi(5a)^2 dy$ (el volumen de un cilindro: el producto de pi, el cuadrado de su radio y su altura). De igual forma, $m_1 = \rho_o V = \rho_o \pi (5a)^2 H$. Entonces,

$$\vec{\mathcal{R}}_1 = \frac{1}{\rho_o \pi (5a)^2 H} \int_0^H y \rho_o \pi (5a)^2 dy \hat{\mathbf{j}} = \frac{1}{2} H \hat{\mathbf{j}}$$

Cilindro sólido: Situamos el eje de coordenadas en el punto $\mathcal{O}$. Dividimos el cilindro en una serie de discos infinitesimales de igual radio pero con un grosor dy.



Debido a la simetría del cono, podemos asegurar que su centro de masa está a una distancia $2a$ en el eje $-i$ y a una altura y situada sobre el eje j.

$$\vec{\mathcal{R}}_2 = 2a\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{m_2} \int y dm \hat{\mathbf{j}}, \quad m_2 = \int dm$$

Por otro lado, sabemos que $m = \rho V$ con $V_{(r,y)} = \pi r^2 y$. Si cortamos transversalmente al cono, podemos asegurar que $r = \tan(2\theta) y$. De esta manera, $dm = \rho \pi \tan^2(2\theta) y^2 dy$. Entonces,

$$\vec{\mathcal{R}}_2 = 2a\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{m_2} \int_0^H \rho \pi \tan^2(2\theta) y^3 dy \hat{\mathbf{j}}, \quad m_2 = \int_0^H \rho \pi \tan^2(2\theta) y^2 dy$$
$$\vec{\mathcal{R}}_2 = -2a\hat{\mathbf{i}} + \frac{3}{4} H \hat{\mathbf{j}}$$

Hueco: Situamos el eje de coordenadas en el punto $\mathcal{O}$. Sabemos que el CM está a una distancia $2a$ en el eje i y está a una altura de un cuarto de **H** (observando que el cono está volteado). Así,

$$\vec{\mathcal{R}}_3 = 2a\hat{\mathbf{i}} + \frac{H}{4} \hat{\mathbf{j}}$$

Para determinar el CM del objeto dado, consideraremos los CMs determinados como partículas puntuales y utilizamos la ecuación del CM para un sistema discreto de partículas.

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{m_1 \vec{\mathcal{R}}_1 + m_2 \vec{\mathcal{R}}_2 + m_3 \vec{\mathcal{R}}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Como le hemos retirado una masa m_2 al cilindro, tomamos el valor de esta porción como *negativa*.

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{m_1 \vec{\mathcal{R}}_1 + m_2 \vec{\mathcal{R}}_2 - m_3 \vec{\mathcal{R}}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Determinamos las masas recordando que la densidad del cono sólido es el triple que la del cilindro:

$$\begin{cases} m_1 = \rho_o V_1 = \rho_o \pi (5a)^2 H \\ m_2 = \rho_o V_2 = \frac{1}{3} \rho_o \pi a^2 H \\ m_3 = \rho_o V_3 = \frac{1}{3} \rho_o \pi a^2 H \end{cases} \implies \begin{cases} m_1 + m_2 + m_3 = \frac{77}{3} \rho_o \pi a^2 H \\ \vec{\mathcal{R}} = \frac{1}{77}(75\vec{\mathcal{R}}_1 + \vec{\mathcal{R}}_2 - \vec{\mathcal{R}}_3) \end{cases}$$

Tomamos las direcciones $\{\hat{\mathbf{i}},\ \hat{\mathbf{j}}\}$ como $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Tal que,

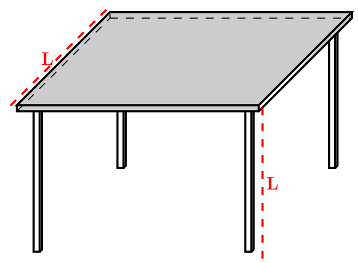
$$\vec{\mathcal{R}}_1 = \frac{H}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{\mathcal{R}}_2 = \begin{pmatrix}-2a\\3H/4\end{pmatrix}, \quad \vec{\mathcal{R}}_3 = \begin{pmatrix}2a\\H/4\end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$\boxed{\vec{\mathcal{R}} = \frac{1}{79}\begin{pmatrix}-4a\\38H\end{pmatrix}}$$

---

§§ Una mesa está constituida por una tabla cuadrada de lado **L** y cuatro patas idénticas de altura **L**. Si la masa de la tabla es cuatro veces la masas de cada pata y todos las partes tienen una distribución de masa homogénea, ¿qué altura por encima del piso quedará el centro de masa (CM) de la mesa?



Douglas Figueroa, Ejercicio Propuesto 17, Página 43

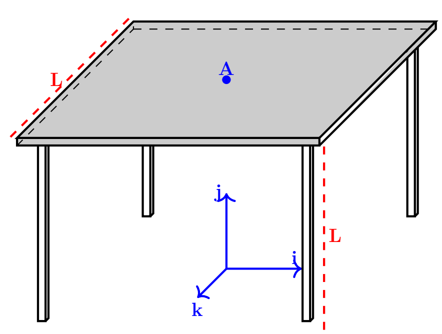
SOLUCIÓN

Debido a la simetría del sistema, podemos asegurar dos cosas:

- El CM de la tabla está en su centro geométrico, que de denominaremos el punto **A**, a una altura L del piso.
- El CM de cada una de las patas está a una altura $L/2$ del piso.

Entonces, si tomamos el origen de nuestro referencial en el suelo y alineado verticalmente con el punto **A**, podemos determinar el CM de la mesa tomando en cuenta las siguientes consideraciones:

- Consideramos las direcciones $\{\hat{\mathbf{i}},\ \hat{\mathbf{j}},\ \hat{\mathbf{k}}\}$ como $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.
- Las componentes en $\hat{\mathbf{i}}$ y en $\hat{\mathbf{k}}$ de los CMs de las patas se anulan entre sí al sumarlos.



Así, para determinar el CM de la mesa, basta con utilizar la definición discreta del CM y tomar las posiciones de los CMs de cada parte de la mesa como las partículas que componen el sistema. Sean

$$\vec{\mathbf{r}}_M = L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ El CM de la tabla} \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{r}}_i = \frac{L}{2}\begin{pmatrix}x_i\\1\\z_i\end{pmatrix}, \text{ con } i=\{1,...,4\} \text{ El CM de cada pata}$$

Tenemos que

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{1}{m_M + \sum_1^4 m_i}\left(m_M\vec{\mathbf{r}}_M + \sum_1^4 m_i\vec{\mathbf{r}}_i\right)$$

Recordamos que

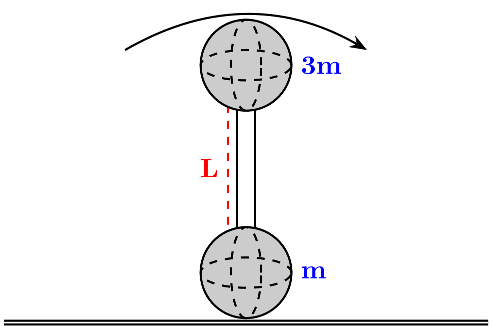
- El enunciado nos garantiza que $m_M = 4m$ y $m_i = m$, entonces $m_M + \sum_1^4 m_i = 8m$.
- La simetría del sistema nos garantiza que $\sum_1^4 m_i\vec{\mathbf{r}}_i = 2mL\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Finalmente, tenemos que

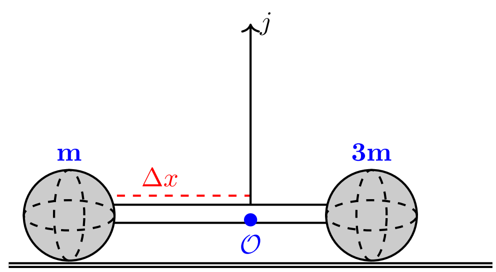
$$\boxed{\vec{\mathcal{R}} = \frac{3L}{4}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}$$

---

§§ Dos esferas de masa **m** y **3m** están en los extremos de una barra de longitud **L** y de masa despreciable. El sistema está colocado verticalmente como muestra la figura anexada sobre un plano horizontal sin fricción. ¿Cuando se suelta el sistema, cuál será el desplazamiento de la masa **m** en el momento en que **3m** choca contra el plano?



Posición inicial



Posición final

Douglas Figueroa, Ejercicio Propuesto 12, Página 42

SOLUCIÓN

Consideremos las dos esferas como partículas puntuales. Es sencillo determinar que el CM del sistema está en la posición $\vec{\mathcal{R}} = 3L/4\hat{\mathbf{j}}$. Ahora, necesitamos determinar dónde quedará el CM después que la masa **m** se desplaza en la distancia Δx; para ello aplicamos la segunda ley de Newton.

$$\sum_i^n \vec{\mathbf{F}}_i = 4m\ddot{\vec{\mathcal{R}}} = 4m\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{N}} \Longrightarrow \ddot{\vec{\mathcal{R}}} = \left(\frac{N-4mg}{4m}\right)\hat{\mathbf{j}}$$

Como esas fuerzas externas se mantienen a lo largo de todo el movimiento, cuando las partículas están apoyadas en el piso, se cumple que $\vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathbf{0}}$. El CM baja a medida que se desplazan ambas esferas hasta llegar al origen del sistema de coordenadas situado por conveniencia en el punto $\mathcal{O}$. Así,

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathbf{0}} = \frac{-m\Delta x + 3m(L - \Delta x)}{4m}\hat{\mathbf{j}} \Longrightarrow -m\Delta x + 3m(L - \Delta x) = 0$$

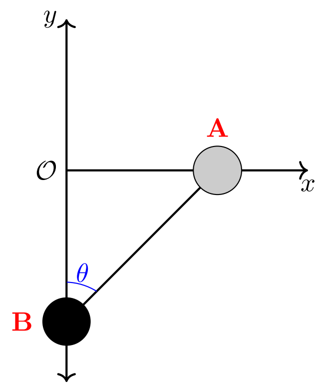
Entonces,

$$\boxed{\Delta x = \frac{3L}{4}}$$

.

---

§§ Dos partículas **A** y **B** de idéntica masa **m**, están unidas entre sí por una cuerda inextensible de largo **a**. La partícula **A** se mueve por una corredera horizontal lisa representada por el eje x, mientras que la partícula se mueve por una corredera vertical lisa representada por el eje y. Inicialmente **B** está en el origen con el sistema en reposo. Si θ es el ángulo variable en **B**, φ es un ángulo conocido y θ tiene rapidez constante, determine una ecuación para la posición del centro de masa (CM) en función del tiempo **t**.



Primer Parcial 2004, prof. Cayetano Di Bartolo

SOLUCIÓN

Tomamos las direcciones $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}\}$ como $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Sabemos que

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{m_A\vec{\mathbf{r}}_A + m_B\vec{\mathbf{r}}_B}{m_A + m_B} \Longrightarrow \ddot{\vec{\mathcal{R}}} = \left(\frac{1}{2}\right)(\ddot{\vec{\mathbf{r}}}_A + \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_B)$$

Procedemos a estudiar la energía y cinemática del sistema.

Cinemática: Las posiciones de ambas masas pueden describirse como

$$r_A = a\sin\theta \quad \text{y} \quad r_B = a\cos\theta$$

Tal que la rapidez de cada una es

$$\dot{r}_A = a\dot{\theta}\cos\theta \quad \text{y} \quad \dot{r}_B = -a\dot{\theta}\sin\theta$$

Y sus aceleraciones son

$$\ddot{r}_A = -a(\dot{\theta})^2\sin\theta \quad \text{y} \quad \ddot{r}_B = -a(\dot{\theta})^2\cos\theta$$

Donde podemos hacer $\dot{\theta} = \omega$.

Energía: Aplicamos conservación de la energía mecánica comparando el momento inicial del sistema y el momento cuando $\theta = \varphi$.

$$(K+U)_f - (K+U)_o = (K+\cancel{U})_f^A + (K+U)_f^B - (\cancel{K}+\cancel{U})_o^A - (\cancel{K}+\cancel{U})_o^B = 0$$

$$\frac{1}{2}m_A(\dot{r}_A)^2 + \frac{1}{2}m_B(\dot{r}_B)^2 - mga\cos\varphi = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\cos^2\varphi + \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\varphi - mga\cos\varphi = 0$$

$$2ga\cos\varphi = a^2\omega^2 \Longrightarrow \omega^2 = \frac{2g\cos\varphi}{a}$$

Así, tenemos que

$$\ddot{\vec{\mathcal{R}}}_{(\theta)} = -g\cos\varphi\begin{pmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

Finalmente, calculamos $\vec{\mathcal{R}}_{(\theta)}$ aplicando la definición de aceleración y velocidad (las derivada de la velocidad y de la posición respectivamente) y teniendo en cuenta las siguientes consideraciones.

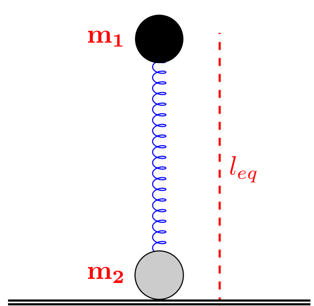
- $\vec{\mathcal{R}}_o = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}a\\ 0\end{pmatrix}$, posición inicial del CM.
- Como $\omega = $ ctte y $\theta_o = 0$, se cumple que $\theta_{(t)} = \omega t$.
- $\dot{\vec{\mathcal{R}}}_o = \vec{\mathbf{0}}$.

Así,

$$\boxed{\vec{\mathcal{R}}_{(t)} = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}1+\sin(\omega t)-\omega t\\ \cos(\omega t)\end{pmatrix}, \quad \omega = \sqrt{\frac{2g\cos\varphi}{a}}}$$

---

§§ Se tiene el sistema de dos partículas $\mathbf{m_1} = 1\ kg$ y $\mathbf{m_2} = 2\ kg$ de la figura anexada en que el resorte, de constante $\mathbf{k}$ no tiene masa. Si partiendo de la posición de equilibrio, $\mathbf{m_1}$ realiza oscilaciones armónicas verticales de frecuencia $\omega_o = 5\ rad/seg$ cuando empujamos a $\mathbf{m_1}$ una distancia $\mathbf{d} = 2\ m$ determine la frecuencia angular de oscilaciones que se producen en el sistema en el momento en que $\mathbf{m_1}$ alcanza su altura máxima.



Primer parcial, prof. José Calatroni, 2012

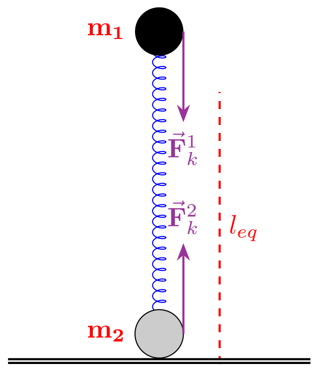
SOLUCIÓN

Situamos el origen de nuestro sistema de referencia en el suelo. Cuando empujamos la masa $\mathbf{m}_1$ una distancia $\mathbf{d}$ hacia abajo, ésta empieza a oscilar con un movimiento armónico simple (MAS) de amplitud $\mathbf{d}$ alrededor del punto de equilibrio. Sea $y_{1(t)}$ la posición de $\mathbf{m}_1$ se cumple que

$$y_{1(t)} - l_{eq} = d\cos(\omega_o t + \delta) \Longrightarrow \ddot{y}_{1(t)} = -d(\omega_o)^2\cos(\omega_o t + \delta)$$

Aplicamos la segunda ley de Newton a $\mathbf{m}_1$ para determinar el módulo de la fuerza de Hooke. Utilizamos el valor máximo de la aceleración cuando se encuentra en el extremo más alto de su movimiento oscilatorio donde $\cos(\omega_o t+\delta)=1$ para que la aceleración tenga sentido lógico (la masa $\mathbf{m}_1$ debe devolverse al punto de equilibrio).

$$\vec{\mathbf{F}}_k^1 + m_1\vec{\mathbf{g}} = m_1\vec{\mathbf{a}}_1 \Longrightarrow -F_k^1 - m_1 g = -d(\omega_o)^2$$
$$F_k^1 = d(\omega_o)^2 - m_1 g$$



Estudiamos ahora la dinámica de $\mathbf{m}_2$ teniendo en cuenta que $\vec{\mathbf{F}}^1_{k(t)} = -\vec{\mathbf{F}}^2_{k(t)}$. Supongamos que el $\mathbf{m}_2$ no despega del piso, tal que existe una fuerza normal.

$$\vec{\mathbf{F}}_k^2 + m_2\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{N}} = m_2\vec{\mathbf{a}}_2 \Longrightarrow F_k^2 - m_2 g + N = 0 \Longrightarrow d(\omega_o)^2 - m_1 g - m_2 g + N = 0$$
$$N = (m_1+m_2)g - d(\omega_o)^2 = -20\,N$$

Hemos obtenido un resultado absurdo para el valor de la normal. Esto nos indica que en algún momento, mientras $\mathbf{m}_1$ asciende desde la posición de equilibrio, la normal se anulará, $\mathbf{m}_2$ perderá contacto con el piso y el sistema está en el aire oscilando alrededor de la longitud natural del resorte l_o.

Cuando el sistema está en el aire, lo podemos tomar con un sistema aislado; tal que la frecuencia angular ω del sistema la calculamos aplicando la segunda ley de Newton a la masa reducida del sistema. Sea $y_{2/1(t)}$ la posición relativa entre $\mathbf{m}_1$ y $\mathbf{m}_2$, se cumple que

$$\vec{\mathbf{F}}_{2/1(t)} = \mu\vec{\mathbf{a}}_{2/1(t)} \Longrightarrow -k(y_{2/1(t)} - l_o) = \mu\ddot{y}_{2/1(t)} \Longrightarrow \ddot{y}_{2/1(t)} = -\frac{k}{\mu}(y_{2/1(t)} - l_o)$$

Esta ecuación corresponde a un MAS, cuya frecuencia angular de oscilaciones es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}} = \sqrt{\frac{k}{m_1}}\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2}} = \omega_o\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2}}$$

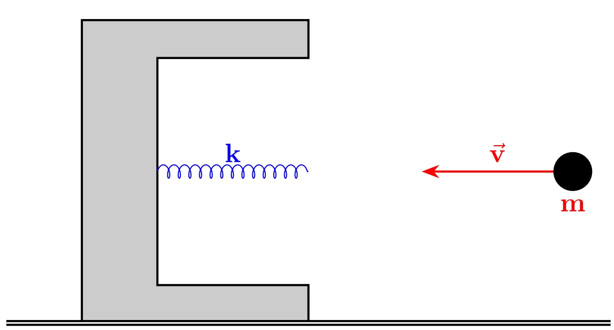
Finalmente,

$$\boxed{\omega = 5\sqrt{\frac{3}{2}}\,rad/seg}$$

.

---

§§ Una partícula de $\mathbf{m}$ se desplaza con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$. Ésta colisiona con con un resorte de constante $\mathbf{k}$ dentro de un bloque de masa $\mathbf{M}$ situado en reposo sobre una superficie sin fricción. Determine la compresión del resorte tal que el sistema permanezca en reposo.



SOLUCIÓN

Estudiaremos la energía del sistema en el referencial CM, tal que analizamos la energía producida por las fuerzas internas y considerando la masa reducida μ. Aplicamos conservación de la energía mecánica.

$$\Delta K + \Delta U = (\cancel{K} + U)_f - (K + \cancel{U})_o = 0 \Longrightarrow \frac{kx^2}{2} - \frac{\mu v^2}{2} = 0, \quad \text{con } \mu = \frac{mM}{m+M}$$

Entonces,

$$\boxed{x = v\sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}}$$

---

§§ Una gota esférica de lluvia sujeta a la gravedad crece debido a la absorción de la humedad del entorno. La cantidad de masa que gana la gota es proporcional a su área superficial. Considerando que la gota comienza a caer del reposo con un radio r_o y su densidad ρ_o se mantiene constante, determine una función para la aceleración respecto al tiempo.

`Propuesto por el prof. Guillermo Donoso, 2019.`

SOLUCIÓN

Sabemos que la masa de la gota de lluvia (dependiente únicamente del radio) viene dada por

$$M_{(r)} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_o \Longrightarrow \frac{dM}{dt} = 4\pi r^2 \rho_o \frac{dr}{dt}$$

Ahora, el enunciado nos informa que la variación de la masa es proporcional al área superficial de la gota. Por lo tanto, existe una constante $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que

$$\frac{dM}{dt} = \lambda(4\pi r^2 \rho_o)$$

Procedemos a determinar una función del radio y luego de la masa.

$$\frac{dr}{dt} = \lambda \Longrightarrow \int_{r_o}^{r} dr = \int_0^t \lambda dt$$
$$\frac{dr}{dt} = \lambda \Longrightarrow r_{(t)} = r_o + \lambda t$$
$$\frac{dr}{dt} = \lambda \Longrightarrow M_{(t)} = \frac{4}{3}\pi (r_o + \lambda t)^3 \rho_o$$

Sea y la distancia que cae la gota, tomamos el origen del sistema de referencia en la posición inicial de la gota y aplicamos la segunda ley de Newton para determinar la aceleración.

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} \Longrightarrow \frac{dP}{dt} = Mg \Longrightarrow \int_0^P dP = \int_0^t \frac{4}{3}\pi \rho_o g (r_o + \lambda t)^3 dt$$
$$P = \left[\frac{4}{3}\pi \rho_o (r_o + \lambda t)^3\right] \frac{dy}{dt} = \frac{\pi g \rho_o}{3\lambda}[(r_o + \lambda t)^4 - (r_o)^4]$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{g}{4\lambda}\left[r_o + \lambda t - (r_o)^4 \left(\frac{1}{r_o + \lambda t}\right)^3\right]$$

Finalmente,

$$\boxed{\ddot{y}_{(t)} = \frac{1}{4} g \left[1 + 3(r_o)^4 \left(\frac{1}{r_o + \lambda t}\right)^4\right]}$$

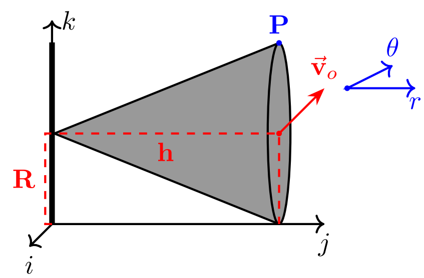
2

Cinemática rotacional

§§ Un cono de masa **M**, altura **h** y radio de base **R** se fija por la punta a una barra vertical de masa despreciable, respecto a la cual puede rotar libremente, de manera tal que su eje de simetría queda paralelo al piso. El cono rueda sin deslizar tal que la rapidez tangencial del punto diametralmente opuesto al punto de contacto es v_o respecto al piso. Con base en esto, determine

a) La velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$ en el centro de la base del cono respecto a la barra vertical.

b) La velocidad angular $\vec{\omega}$ y la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ del punto superior del borde de la base del cono, **P**.



`Primer parcial, Verano 2019, Hermann Albrecht.`

SOLUCIÓN

Utilizamos coordenadas cilíndricas $\{\hat{\mathbf{r}},\ \hat{\theta},\ \hat{\mathbf{k}}\}$ para describir los vectores solicitados. Como el cono consiste en un sólido rígido, se cumple que la velocidad en cualquier punto viene dada por la expresión $\vec{\mathbf{v}}=\vec{\omega}\times\vec{\mathbf{r}}$. Así,

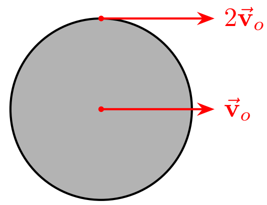
$$\vec{\mathbf{v}}_o = \vec{\boldsymbol{\Omega}} \times \vec{\mathbf{r}}$$

$$v_o\hat{\theta} = \vec{\boldsymbol{\Omega}} \times (R\hat{\mathbf{k}} + h\hat{\mathbf{r}}) \Longleftrightarrow \underbrace{\boxed{\vec{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{v_o}{h}\hat{\mathbf{k}}}}_{\text{Pregunta } a)}$$

Ahora, considerando que el punto **P** rota alrededor del eje k y el eje radial r, su velocidad angular $\vec{\omega}$ tiene dos componentes en dichos ejes; en especial, su componente en k es el vector $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$. Podemos asegurar entonces que

$$\vec{\omega} = \vec{\boldsymbol{\Omega}} + \vec{\omega}_r = \frac{v_o}{h}\hat{\mathbf{k}} - w_r\hat{\mathbf{r}}$$

Cabe destacar que la dirección $-\hat{\mathbf{r}}$ se debe a la forma en que está rotando el punto **P**, en sentido horario. Entonces, para calcular el valor de w_r, partimos de la condición de rodadura



Así,

$$2v_o\hat{\theta} = \vec{\omega}_r \times 2R\hat{\mathbf{k}} \Longleftrightarrow \vec{\omega}_r = -\frac{v_o}{R}\hat{\mathbf{r}}$$

Por lo tanto,

$$\underbrace{\boxed{\vec{\omega} = \frac{v_o}{Rh}(R\hat{\mathbf{k}} - h\hat{\mathbf{r}})}}_{\text{Pregunta } b)}$$

Finalmente, calculamos la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$.

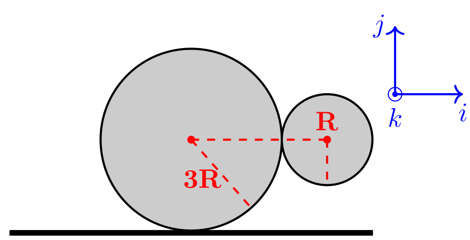
$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}} = \frac{v_o}{Rh}(R\hat{\mathbf{k}} - h\hat{\mathbf{r}}) \times (2R\hat{\mathbf{k}} + h\hat{\mathbf{r}}) \Longrightarrow \underbrace{\boxed{\vec{\mathbf{v}} = 3v_o\hat{\theta}}}_{\text{Pregunta } b)}$$

---

§§ La figura adjunta muestra la vista lateral de una sección del mecanismo de una máquina compleja. Dicha sección consta de una barra que se mueve horizontalmente y dos engranajes de radios **R** y **3R**, respectivamente. El engranaje de radio **R** gira con velocidad angular $\vec{\omega} = \omega_o \sin(at^2 + b)\hat{\mathbf{k}}$, donde ω_o, **a** y **b** son constantes de las dimensiones apropiadas. Sobre la base de este planteamiento, determine:

a) El vector aceleración angular del engranaje de radio **3R**.

b) La velocidad de la barra.



`Primer parcial, Verano 2019, Hermann Albrecht.`

SOLUCIÓN

Para determinar la aceleración angular del engranaje de radio **3R**, necesitamos primero su velocidad angular. Obtenemos tal velocidad partiendo del vínculo entre los dos engranajes: la velocidad tangencial en el punto de contacto es la misma para ambos. Situamos prigen del referencial en el centro del engranaje pequeño y calculamos la velocidad $\vec{\mathbf{u}}$ en el punto de contacto.

$$\vec{\mathbf{u}} = \omega \times \vec{\mathbf{r}}_1 = \omega_o \sin(at^2 + b)\hat{\mathbf{k}} \times R(-\hat{\mathbf{i}}) = -R\omega_o \sin(at^2 + b)\hat{\mathbf{j}}$$

Ahora, situamos el origen del referencial en el centro del engranaje grande y calculamos la velocidad angular $\vec{\mathbf{\Omega}}$ del mismo.

$$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{\Omega}} \times \vec{\mathbf{r}}_2 \Longrightarrow -R\omega_o \sin(at^2 + b)\hat{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{\Omega}} \times 3R\hat{\mathbf{i}} \Longleftrightarrow \vec{\mathbf{\Omega}} = -\frac{1}{3}\omega_o \sin(at^2 + b)\hat{\mathbf{k}}$$

Derivamos para obtener la aceleración angular.

$$\underbrace{\boxed{\dot{\vec{\boldsymbol{\Omega}}} = -\frac{2}{3}\omega_o at\cos(at^2+b)\hat{\mathbf{k}}}}_{\text{Pregunta } a)}$$

Para determinar la velocidad de la barra, basta con situar el origen del referencial en el centro del engranaje grande y calcular la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ mediante el producto cruz.

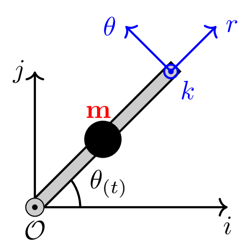
$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\boldsymbol{\Omega}} \times \vec{\mathbf{r}}_3 = -\frac{1}{3}\omega_o\sin(at^2+b)\hat{\mathbf{k}} \times 3R(-\hat{\mathbf{j}}) \Longrightarrow \underbrace{\boxed{\vec{\mathbf{v}} = -R\omega_o\sin(at^2+b)\hat{\mathbf{i}}}}_{\text{Pregunta } b)}$$

---

§§ Una barra de masa **M** y longitud **l** rota en torno a un eje que pasa por el punto $\mathcal{O}$, siendo su posición angular $\theta_{(t)} = \pi\sin(\beta t)$. En ella hay una cuenta de masa **m** que desliza sin fricción y que tiene una velocidad constante respecto a la barra dada por $\vec{\mathbf{v}} = v_o\hat{\mathbf{r}}$. Considere la base de vectores móviles en coordenadas cilíndricas, $\{\hat{\mathbf{r}},\ \hat{\theta},\ \hat{\mathbf{k}}\}$, y determine:

a) El vector velocidad $\dot{\vec{\mathbf{r}}}_{(t)}$ de la cuenta como función del tiempo.

b) El vector aceleración $\ddot{\vec{\mathbf{r}}}_{(t)}$ de la cuenta como función del tiempo.



`Primer parcial, Verano 2019, Hermann Albrecht.`

SOLUCIÓN

Tenemos que la posición de la partícula viene dada por el vector $\vec{\mathbf{r}} = r\hat{\mathbf{r}}$ cuyo módulo y dirección son funciones del tiempo. Basta entonces con aplicar las definiciones de velocidad y aceleración respectivamente.

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

Donde $\dot{r} = v_o$ (la velocidad con que la partícula avanza en dirección radial), $\dot{\theta} = \pi\beta\cos(\beta t)$ y, dado que $\dot{r}$ es constante, $r = v_o t$. Entonces,

$$\underbrace{\boxed{\dot{\vec{\mathbf{r}}}_{(t)} = v_o[\hat{\mathbf{r}} + \pi\beta t\cos(\beta t)]\hat{\theta}}}_{\text{Pregunta } a)}$$

Consideramos las direcciones $\{\hat{\mathbf{r}},\ \hat{\theta},\ \hat{\mathbf{k}}\}$ como $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, derivamos la velocidad y simplificamos para obtener la aceleración.

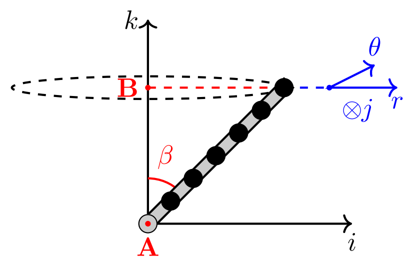
$$\underbrace{\boxed{\ddot{\vec{\mathbf{r}}}_{(t)} = -v_o\begin{bmatrix}\pi^2\beta^2 t\cos^2(\beta t)\\ \pi\beta^2 t\sin(\beta t) - 2\pi\beta\cos(\beta t)\\ 0\end{bmatrix}}}_{\text{Pregunta } b)}$$

---

§§ Dado un sistema compuesto por una barra de masa despreciable tiene longitud **L** que tiene incrustadas 6 bolas de masa **m** y radio despreciable, éstas se mueve solidariamente con la barra. La distancia entre cada bola es la octava parte de la longitud de la barra. El sistema rota en torno a un eje vertical con rapidez angular constante $\vec{\omega} = \omega_o \hat{\mathbf{k}}$ y una inclinación contante dada por el ángulo β. Sobre la base de este planteamiento y usando la base de vectores móviles en coordenadas cilíndricas, $\{\hat{\mathbf{r}},\ \hat{\theta},\ \hat{\mathbf{k}}\}$, determine:

a) El momentum angular del sistema $\vec{\mathcal{L}}$ medido desde el punto **B**.

b) El momentum angular del sistema $\vec{\mathcal{L}}$ medido desde el punto **A**.



SOLUCIÓN

El momentum angular total del sistema de seis partículas es la suma vectorial de los momentums de cada una de ellas. Podemos calcular cada momentum angular realizando dos productos vectoriales por cada partícula y luego realizar la suma vectorial. Sin embargo, debido a la simetría del sistema, podemos obtener una expresión general para el momentum angular y luego aplicar la notación sigma para obtener la suma vectorial.

Desde el punto B: Partimos de los vectores posición de cada una de las partículas empezando con la más cercana a al origen del referencial.

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{r}}_1^B &= \vec{\mathbf{r}}_1^A - \vec{\mathbf{r}}_B^A = \frac{3l}{8}\sin\beta\hat{\mathbf{r}} - \frac{5l}{8}\cos\beta\hat{\mathbf{k}} \\
\vec{\mathbf{r}}_2^B &= \vec{\mathbf{r}}_2^A - \vec{\mathbf{r}}_B^A = \frac{4l}{8}\sin\beta\hat{\mathbf{r}} - \frac{4l}{8}\cos\beta\hat{\mathbf{k}} \\
\vec{\mathbf{r}}_3^B &= \vec{\mathbf{r}}_3^A - \vec{\mathbf{r}}_B^A = \frac{5l}{8}\sin\beta\hat{\mathbf{r}} - \frac{3l}{8}\cos\beta\hat{\mathbf{k}} \\
&\vdots \\
\vec{\mathbf{r}}_i^B &= (i+2)a\sin\beta\hat{\mathbf{r}} + (i-6)a\cos\beta\hat{\mathbf{k}}; \quad a = \frac{l}{8}, \quad i = \{1,2,3,\ldots,6\}
\end{aligned}
$$

Calculamos $\vec{\mathcal{L}}_i^B$.

$$
\begin{aligned}
\omega \times \vec{\mathbf{r}}_i^B &= (i+2)a\omega_o\sin\beta\hat{\theta} \\
\vec{\mathbf{r}}_i^B \times m(\omega\times\vec{\mathbf{r}}_i^B) &= (i+2)^2a^2m\omega_o\sin^2\beta\hat{\mathbf{k}} + (6-i)(i+2)a^2m\omega_o\cos\beta\sin\beta\hat{\mathbf{r}}
\end{aligned}
$$

Finalmente, el momentum angular total $\vec{\mathcal{L}}_B$ del sistema es

$$
\vec{\mathcal{L}}_B = \sum_{i=1}^{6}\vec{\mathcal{L}}_i^B = \sum_{i=1}^{6}(i+2)^2a^2m\omega_o\sin^2\beta\hat{\mathbf{k}} + \sum_{i=1}^{6}(6-i)(i+2)a^2m\omega_o\cos\beta\sin\beta\hat{\mathbf{r}}
$$

$$
\underbrace{\boxed{\vec{\mathcal{L}}_B = \frac{199l^2}{64}m\omega_o\sin^2\beta\hat{\mathbf{k}} + \frac{65l^2}{64}m\omega_o\sin\beta\cos\beta\hat{\mathbf{r}}}}_{\text{Pregunta } a)}
$$

Desde el punto A: Partimos de los vectores posición de cada una de las partículas empezando con la más cercana a al origen del referencial.

$$\vec{\mathbf{r}}_1^A = \frac{3l}{8}\sin\beta\hat{\mathbf{r}} + \frac{3l}{8}\cos\beta\hat{\mathbf{k}}$$
$$\vec{\mathbf{r}}_2^A = \frac{4l}{8}\sin\beta\hat{\mathbf{r}} + \frac{4l}{8}\cos\beta\hat{\mathbf{k}}$$
$$\vec{\mathbf{r}}_3^A = \frac{5l}{8}\sin\beta\hat{\mathbf{r}} + \frac{5l}{8}\cos\beta\hat{\mathbf{k}}$$
$$\vdots$$
$$\vec{\mathbf{r}}_i^A = (i+2)a(\sin\beta\hat{\mathbf{r}} + \cos\beta\hat{\mathbf{k}}); \quad a = \frac{l}{8}, \quad i = \{1, 2, 3, \ldots, 6\}$$

Calculamos $\vec{\mathcal{L}}_i^B$.

$$\omega \times \vec{\mathbf{r}}_i^A = (i+2)a\omega_o \sin\beta\hat{\theta}$$
$$\vec{\mathbf{r}}_i^A \times m(\omega \times \vec{\mathbf{r}}_i^A) = (i+2)^2 a^2 m\omega_o(\sin^2\beta\hat{\mathbf{k}} - \cos\beta\sin\beta\hat{\mathbf{r}})$$

Finalmente, el momentum angular total $\vec{\mathcal{L}}_A$ del sistema es

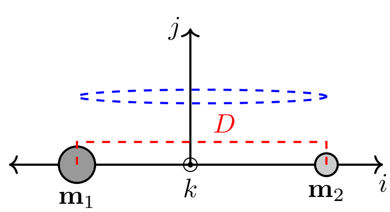
$$\vec{\mathcal{L}}_A = \sum_{i=1}^{6}(i+2)^2 a^2 m\omega_o(\sin^2\beta\hat{\mathbf{k}} - \cos\beta\sin\beta\hat{\mathbf{r}})$$
$$\underbrace{\boxed{\vec{\mathcal{L}}_A = \frac{199l^2}{64}m\omega_o(\sin^2\beta\hat{\mathbf{k}} - \cos\beta\sin\beta\hat{\mathbf{r}})}}_{\text{Pregunta } b)}$$

---

§§ Un sistema aislado consta de dos partículas de masas $\mathbf{m_1} = M$ y $\mathbf{m_2} = m$, separadas por una distancia $\mathbf{D}$, como se muestra en la figura adjunta. Las fuerzas de interacción entre ellas son paralelas a la línea que las une.

a) El sistema rota con velocidad angular $\vec{\omega} = -\omega_o\hat{\mathbf{j}}$ alrededor de un eje perpendicular a la línea que las une, separado de $\mathbf{m_1}$ por una distancia $\mathbf{d}$. Calcule el momentum angular total del sistema, respecto a este eje como función de $\mathbf{d}$.

b) Calcule la posición del centro de masa relativa a $\mathbf{m_1}$ y muestre que la magnitud del momentum angular es mínima si $\mathbf{d} = ||\vec{\mathcal{R}}_1||$ (la componente horizontal del centro de masa calculado).



`Guía del Departamento, Ejercicio 11, Página 4`

SOLUCIÓN

El momentum angular total del sistema de dos partículas es la suma vectorial de los momentums de cada una de ellas.

$$\vec{\mathcal{L}}_1 = \vec{\mathbf{r}}_1 \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}_1)$$
$$\vec{\mathcal{L}}_1 = d(-\hat{\mathbf{i}}) \times M[\omega_o(-\hat{\mathbf{j}}) \times d(-\hat{\mathbf{i}})]$$
$$\vec{\mathcal{L}}_1 = -Md^2\omega_o\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathcal{L}}_2 = \vec{\mathbf{r}}_2 \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}_2)$$
$$\vec{\mathcal{L}}_2 = (D-d)\hat{\mathbf{i}} \times m[\omega_o(-\hat{\mathbf{j}}) \times (D-d)\hat{\mathbf{i}}]$$
$$\vec{\mathcal{L}}_2 = -m(D-d)^2\omega_o\hat{\mathbf{j}}$$

Entonces, el momentum angular del sistema $\vec{\mathcal{L}}$ es

$$\vec{\mathcal{L}} = \vec{\mathcal{L}}_1 + \vec{\mathcal{L}}_2 \Longrightarrow \underbrace{\boxed{\vec{\mathcal{L}}_{(d)} = \omega_o[2mDd - (M+m)d^2 - mD^2]\hat{\mathbf{j}}}}_{\text{Pregunta } a)}$$

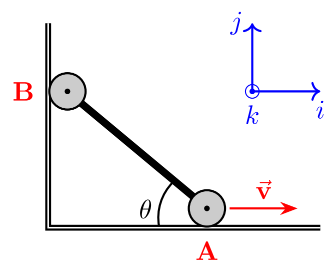
Es sencillo determinar que el el centro de masa del sistema relativo a $\mathbf{m}_1$ es $\vec{\mathcal{R}}_1 = \dfrac{mD}{M+m}\hat{\mathbf{i}}$. Para demostrar que este valor es máximo en la función de $\vec{\mathcal{L}}_{(d)}$, aplicamos el criterio de la primera derivada.

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{0}} \Longleftrightarrow \omega_o[2mD - 2(M+m)d] = \vec{\mathbf{0}} \Longleftrightarrow d = \frac{mD}{M+m}$$

$b)$: dado que el módulo de $\vec{\mathcal{L}}_{(d)}$ es una función cuadrática cóncava hacia abajo y la derivada se anula para el valor de $\mathbf{d} = ||\vec{\mathcal{R}}_1||$, éste es un máximo para $\vec{\mathcal{L}}_{(d)}$ de acuerdo con el criterio de la primera derivada. Q.E.D.

---

§§ Una barra rígida de longitud $\mathbf{l}$ se mueve con sus extremos apoyados en suelo y pared mediante dos ruedas de radio y masa despreciable. El extremo $\mathbf{A}$ tiene una rapidez conocida, $\vec{\mathbf{v}} = v_o\hat{\mathbf{i}}$. Hallar un expresión para la velocidad angular $\vec{\omega}$ de la barra y la velocidad de extremo $\mathbf{B}$.



SOLUCIÓN

Situamos el origen del sistema de referencia en la esquina de la pared. Sabemos que el movimiento general de una partícula corresponde a su movimiento de traslación y de rotación, en este caso, el extremo $\mathbf{B}$ de la barra se traslada con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ y rota con respecto al punto $\mathbf{A}$ con una velocidad angular $\vec{\omega}$ (propia de toda la barra). Así, su movimiento general será la suma de su movimiento traslacional con el rotacional.

$$\vec{\mathbf{v}}_B = \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}} + \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}$$

Donde $\vec{\mathbf{r}}$ es la posición de $\mathbf{B}$ respecto a $\mathbf{B}$. Entonces, debido a la distribución del sistema, tenemos que

$$-u\hat{\mathbf{j}} = v_o\hat{\mathbf{i}} + \omega\hat{\mathbf{k}} \times (-l\cos\theta\hat{\mathbf{i}} + l\sin\theta\hat{\mathbf{j}}) = (v_o - \omega l\cos\theta)\hat{\mathbf{i}} - \omega l\sin\theta\hat{\mathbf{j}}$$

Igualamos componente a componente y obtenemos un sistema de ecuaciones cuya solución es fácil de obtener.

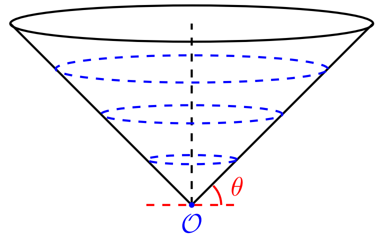
$$\begin{cases} v_o - \omega l\cos\theta = 0 \\ \omega l\sin\theta = u \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\vec{\omega}_{(\theta)} = \frac{v_o}{l\sin\theta}\hat{\mathbf{k}}}, \boxed{\vec{\mathbf{u}}_{(\theta)} = -v_o\cot\theta\hat{\mathbf{j}}}$$

---

§§ Considere una curva espiral cónica descrita en coordenadas esféricas por las ecuaciones: $\theta = 45°$, $\phi_{(r)} = 2\pi\epsilon r$; donde $\epsilon \in \mathbb{R}$ y r es el radio de la sección en cuestión. Una partícula se mueve sobre la espiral partiendo desde el origen manteniendo una velocidad radial constante y conocida, $\dot{r} = v_o$.

a) Determine la distancia radial del punto **P** en el cual la rapidez de la partícula es $3v_o$.

b) Encuentre una expresión para la longitud total de la espira. Luego, determine tal longitud y el tiempo que la partícula tarda en recorrerla.



Primer parcial, prof. Guillermo Donoso, 2010

SOLUCIÓN

Utilizamos las coordenadas esféricas para definir la posición de la partícula. Sea ϕ y θ, tenemos que

$$\begin{cases} z = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\cos\phi \\ x = r\sin\theta\sin\phi \end{cases} \implies \vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

Consideramos las direcciones $\{\hat{\mathbf{i}},\ \hat{\mathbf{j}},\ \hat{\mathbf{k}}\}$ como $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, tal que

$$\vec{\mathbf{r}} = r\begin{pmatrix}\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta\end{pmatrix} = r\hat{\mathbf{r}}$$

Determinamos la velocidad de la partícula.

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\begin{pmatrix}\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\phi \\ \dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - \dot{\phi}\sin\theta\sin\phi \\ -\dot{\theta}\sin\theta\end{pmatrix} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$$

Dado que $\theta = 45°$, $\phi_{(r)} = 2\pi\epsilon r$ y $\dot{r} = v_o$, el vector velocidad que como $\vec{\mathbf{v}}_{(r)} = v_o\hat{\mathbf{r}} + \pi\sqrt{2}\epsilon r\hat{\phi}$.

Sabemos que en el punto **P**, la rapidez de la partícula es $3v_o$, es decir que se cumple la siguiente igualdad de la que podemos determinar la distancia radial r_P.

$$3v_o = \sqrt{(v_o)^2 + (\pi\sqrt{2}\epsilon r_P)^2} \implies \underbrace{\boxed{r_P = \frac{2v_o}{\pi\epsilon}}}_{\text{Pregunta } a)}$$

Sea L la longitud total del espiral desde el punto $\mathcal{O}$ hasta el punto **P** recorrida por la partícula, ésta viene dada por el producto entre la rapidez y el tiempo que tarda la partícula en recorrer tal distancia. Así, para un instante t cualquiera, se cumple que

$$dL = ||\vec{\mathbf{v}}_{(r)}||dt \implies \int_0^L dL = \int_0^t \sqrt{(v_o)^2 + (\pi\sqrt{2}\epsilon r)^2}dt$$

Dado que $\dot{r}=v_o$ y la partícula parte del origen, entonces podemos asegurar que $r_{(t)}=v_o t$; tal que

$$L_{(t)} = \int_0^t \sqrt{(v_o)^2 + (\pi\sqrt{2}\epsilon v_o t)^2}dt$$

$$\underbrace{\boxed{L_{(t)} = \frac{v_o}{2}\left[\sqrt{1+(\sqrt{2}\pi\epsilon t)^2} + \frac{1}{\sqrt{2}\pi\epsilon}\mathrm{lgn}\left|\sqrt{2}\pi\epsilon t + \sqrt{1+(\sqrt{2}\pi\epsilon t)^2}\right|\right]}}_{\text{Pregunta } b)}$$

Para calcular t', aprovechamos que tomamos el tiempo inicial $t_o=0$ seg; tal que

$$t' = \int_0^{t'} dt$$

Dado que $\dot{r}=v_o$ y $r_{(t)}=v_o t$, hacemos el cambio de variable

$$t = \frac{r}{v_o} : dt = \frac{dr}{v_o} \Longrightarrow \underbrace{\boxed{t' = \int_0^{r_P} \frac{dr}{v_o} = \frac{2}{\pi\epsilon}}}_{\text{Pregunta } b)}$$

Finalmente, evaluamos t' en la expresión de $L_{(t)}$.

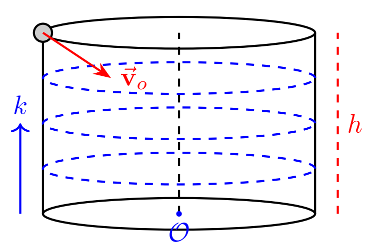
$$\underbrace{\boxed{L = \frac{v_o}{2\sqrt{2}\pi\epsilon}(3\sqrt{2}\pi\epsilon + \mathrm{lgn}|2\sqrt{2}+3|)}}_{\text{Pregunta } b)}$$

---

§§ Una partícula **P** de masa **m** se lanza por el interior de un recipiente cilíndrico con eje vertical, radio **R** y altura **h**. El roce de **P** con la pared cilíndrica es despreciable; domina el roce viscoso $\vec{\mathbf{F}}_r = -\epsilon\vec{\mathbf{v}}$, con $\epsilon \in \mathbb{R}$, de **P** con el fluido que llena el recipiente. La partícula es lanzada en contacto con la superficie cilíndrica, con velocidad horizontal de magnitud v_o. Determine:

a) La velocidad vertical $\vec{\mathbf{v}}_z = \dot{z}_{(t)}\hat{\mathbf{k}}$ como función del tiempo y la función $z_{(t)}$.

b) La velocidad angular de **P** como función del tiempo.



Primer parcial, prof. Guillermo Donoso, 2010

SOLUCIÓN

Utilizamos un sistema de refencia en base a coordenadas cilíndricas con el origen en el punto $\mathcal{O}$. Así, sea z una función de la altura con respecto al tiempo, inicialmente tomamos la posición $\vec{\mathbf{r}}_0 = R\hat{\mathbf{r}} + h\hat{\mathbf{k}}$ y una posición genérica dada por $\vec{\mathbf{r}}_{(t)} = R\hat{\mathbf{r}} + z\hat{\mathbf{k}}$. Determinamos velocidad y aceleración.

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = R\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = -R(\dot{\theta})^2\hat{\mathbf{r}} + R\ddot{\theta}\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

Aplicamos la segunda ley de Newton a la partícula recordando que la normal tiene dirección radial.

$$\sum_{i}^{n} \vec{\mathbf{F}} = -\epsilon\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{N}} + m\vec{\mathbf{g}} = m\vec{\mathbf{a}}$$

Consideramos las direcciones $\{\hat{\mathbf{r}},\ \hat{\theta},\ \hat{\mathbf{k}}\}$ como $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, tal que

$$-\epsilon\begin{pmatrix}0\\R\dot{\theta}\\\dot{z}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}N\\0\\-mg\end{pmatrix} = m\begin{pmatrix}-R(\dot{\theta})^2\\R\ddot{\theta}\\\ddot{z}\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} N = -mR(\dot{\theta})^2 \\ -\epsilon R\dot{\theta} = mR\ddot{\theta}, \quad \text{(i)} \\ -\epsilon\dot{z} - mg = m\ddot{z}, \quad \text{(ii)} \end{cases}$$

De la ecuación (ii), determinamos las funciones $\dot{z}_{(t)}$ y $z_{(t)}$.

$$m\frac{d\dot{z}}{dt} = -(mg + \epsilon\dot{z}) \Longrightarrow \int_0^{\dot{z}} \frac{d\dot{z}}{-(mg\dot{z} + \epsilon)} = \int_0^t \frac{dt}{m}$$

$$m\frac{d\dot{z}}{dt} = -(mg + \epsilon\dot{z}) \Longrightarrow \underbrace{\boxed{\dot{z}_{(t)} = \frac{mg}{\epsilon}\left[\pm\text{exp}\left(-\frac{\epsilon}{m}t\right) - 1\right]}}_{\text{Pregunta } a)}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{mg}{\epsilon}\left[\pm\text{exp}\left(-\frac{\epsilon t}{m}\right) - 1\right] \Longrightarrow \int_h^z dz = \int_0^t \frac{mg}{\epsilon}\left[\pm\text{exp}\left(-\frac{\epsilon t}{m}\right) - 1\right]$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{mg}{\epsilon}\left[\pm\text{exp}\left(-\frac{\epsilon t}{m}\right) - 1\right] \Longrightarrow \underbrace{\boxed{z_{(t)} = h - \frac{mg}{\epsilon}t \mp \frac{m^2 g}{\epsilon^2}\left[\text{exp}\left(-\frac{\epsilon}{m}t\right) - 1\right]}}_{\text{Pregunta } a)}$$

De la ecuación (i), determinamos la función $\dot{\theta}_{(t)}$ recordando $v_o = \dot{\theta}_o R$.

$$mR\frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\epsilon R\dot{\theta} \Longrightarrow \int_{\dot{\theta}_o}^{\dot{\theta}} \frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = \int_0^t -\frac{\epsilon dt}{m} \Longrightarrow \underbrace{\boxed{\dot{\theta}_{(t)} = \pm\frac{v_o}{R}\text{exp}\left(-\frac{\epsilon}{m}t\right)}}_{\text{Pregunta } b)}$$

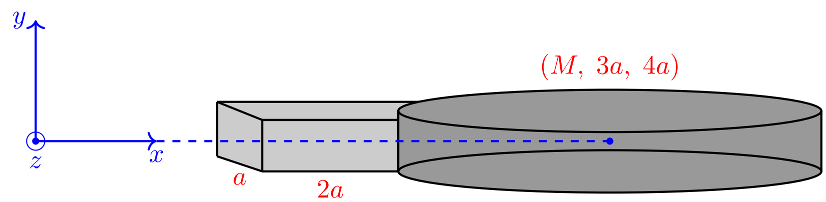
Parte II

Segundo Parcial

3

Dinámica rotacional

§§ Determine el momento de inercia de una raqueta de ping-pong constituida por una barra de dimensiones **a**, **2a** y **4a** unida a un disco de radio **3a** y altura **4a** (con $a \in \mathbb{R}$), que rota en torno al eje y al borde de la raqueta; tal como muestra la figura anexa. Considere que ambas partes tienen masa **M** y que el eje x contiene el centro de masa de la barra y el cilindro.



Propuesto por el prof. Hermann Albrecht, 2019

SOLUCIÓN

Consideraremos que el momento de inercia total del sistema, **I**, es la suma del momento de inercia de sus componentes: $\mathbf{I}_b$, el de la barra, y $\mathbf{I}_d$, el del disco. Ahora, como queremos saber el momento respecto al eje y situado en el extremo de la barra, aplicamos el teorema de Steiner (ejes paralelos); elegimos el eje y' paralelo a y que pasa por el centro de masa de cada parte de la raqueta.

Así, sabemos que, respecto al CM de cada componente, los momentos de inercia son:

$$I'_b = \frac{1}{12}M[a^2 + (2a)^2] = \frac{5}{12}Ma^2$$

$$I'_d = \frac{1}{2}M(3a)^2 = \frac{9}{2}Ma^2$$

Aplicando el teorema de Steiner.

$$I_b = I'_b + Ma^2 = \frac{5}{12}Ma^2 + Ma^2 = \frac{17}{12}Ma^2$$

$$I_d = I'_d + M(5a)^2 = \frac{9}{2}Ma^2 + 25Ma^2 = \frac{59}{2}Ma^2$$

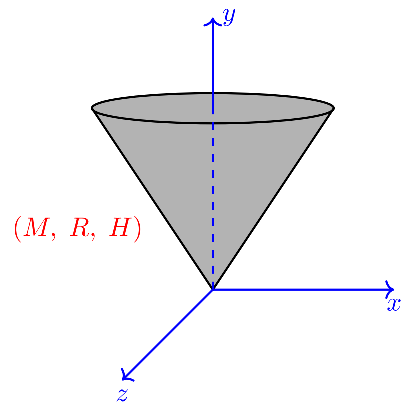
Finalmente, el momento de inercia total.

$$I = I_b + I_d = \frac{17}{12}Ma^2 + \frac{59}{2}Ma^2$$

$$\boxed{I = \frac{371}{12}Ma^2}$$

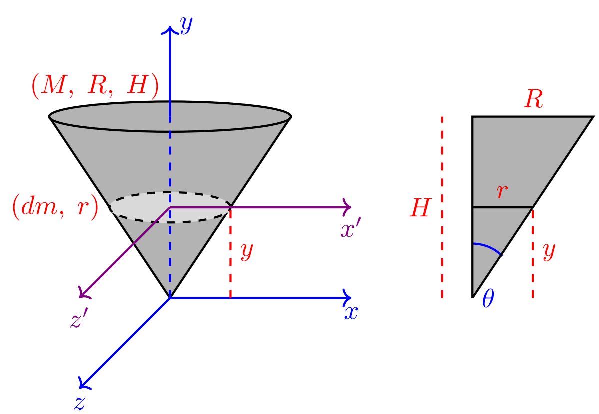
---

§§ Determine el momento de inercia respecto a los tres ejes principales y al origen de un cono macizo de altura **H**, masa **M** y base de radio **R**.



SOLUCIÓN

Aprovecharemos que conocemos el momento de inercia para un disco para determinar el del cono. Empecemos respecto al eje y. Supongamos que el cono está dividido en un conjunto de discos de radio r, masa infinitesimal dm y a distancia y del origen; tal que su momento de inercia es $dI_y = (1/2)r^2 dm$.



Entonces, basta con sumar el momento de todos los discos infinitesimales que componen el cono macizo. Sea ρ_o la densidad del cono (se usa la densidad del cono porque el disco es una parte del cono) se cumple que

$$I_y = \int \frac{1}{2} r^2 dm, \quad \text{con } dm = \rho_o dV$$

Cortamos transversalmente el cono y denotamos el ángulo θ para tener una relación entre r, y, R y H.

$$\tan\theta = \frac{r}{y} = \frac{H}{R} \Longrightarrow y = \left(\frac{R}{H}\right) r$$

Determinamos dV rápidamente.

$$V_{(r,y)} = \frac{1}{3}\pi r^2 y, \quad \text{con } y = \left(\frac{H}{R}\right) r \Longrightarrow V = \left(\frac{H\pi}{3R}\right) r^3 \Longrightarrow dV = \left(\frac{H\pi}{R}\right) r^2 dr$$

Entonces,

$$I_y = \frac{1}{2}\rho_o \int_0^R \left(\frac{H\pi}{R}\right) r^4 dr, \quad \text{con } \rho_o = \frac{M}{V_{(R,H)}} = \frac{3M}{\pi R^2 H} \Longrightarrow \boxed{I_y = \frac{3}{10} M R^2}$$

Procedemos ahora a calcular I_x y I_z. Debido a la simetría del cono, podemos asegurar que $I_x = I_z = I_{x;z}$ y, dado que son ejes perpendiculares a y, podemos aplicar el teorema de ejes perpendiculares. Colocamos unos ejes x' y z' que pasen por el centro del disco infinitesimal y así

$$dI_{x'} + dI_{z'} = 2dI_{x';z'} = dI_y \Longrightarrow dI_{x';z'} = \frac{1}{2}dI_y$$

Ahora, como el disco está a una altura (en este caso una distancia perpendicular) y de ambos ejes, debemos aplicar el teorema de Steiner para determinar $I_{x;z}$. Entonces,

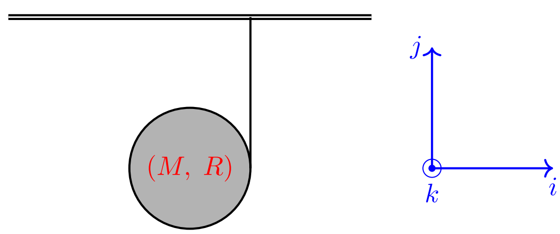
$$dI_{x;z} = \frac{1}{2}dI_y + y^2 dm, \quad \text{con } dm = \rho_o dV,\ dI_y = \frac{1}{2}r^2 dm$$

Conocemos la integral de dI_y y repetimos el proceso de integrar para determinar la integral de $r^2 dm$. Finalmente,

$$\boxed{I_x = I_z = \frac{3}{5}M\left(\frac{1}{4}R^2 + H^2\right)}$$

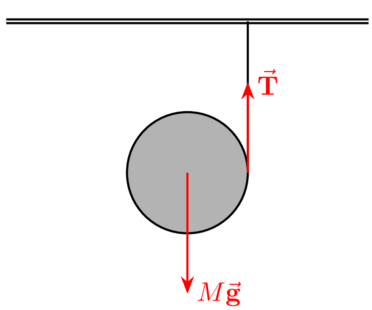
---

§§ La figura muestra una cuerda inextensible, sin masa, fija al techo y enrollada alrededor de un disco. El disco tiene masa **M**, radio **R** y gira desenredándose mientras cae verticalmente sin que exista desplazamiento entre el disco y la cuerda. Si el sistema parte del reposo, elija un sistema de coordenadas, dibújelo claramente y halle la tensión de la cuerda, la aceleración angular del disco y la aceleración del centro de masa.



Guía del prof. Cayetano Di Bartolo, Ejercicio 15, Página 6

SOLUCIÓN



Estudiamos la dinámica traslacional y rotacional del rígido. Tomamos el origen del referencial en el punto de contacto entre el disco y la cuerda para poder aplicar la condición de rodar sin deslizar.

$$\sum_i^2 \vec{\mathbf{F}}_i^{ext} = M\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{T}} = M\ddot{\vec{\mathcal{R}}}$$

$$\boxed{Mg - T = M\ddot{\mathcal{R}}}$$

$$\vec{\mathbf{\Gamma}} = \vec{\tau}_{\text{peso}} = \vec{\mathbf{r}} \times M\vec{\mathbf{g}} = -R\hat{\mathbf{i}} \times -Mg\hat{\mathbf{j}} = I\vec{\alpha}$$

$$\boxed{RMg\hat{\mathbf{k}} = I\vec{\alpha}}$$

Por igualdad de vectores, podemos deducir que $\hat{\alpha} = \hat{\mathbf{k}}$. Por otro lado, como no estamos trabajando en el referencial CM, debemos determinar el momento de inercia mediante el teorema de Steiner

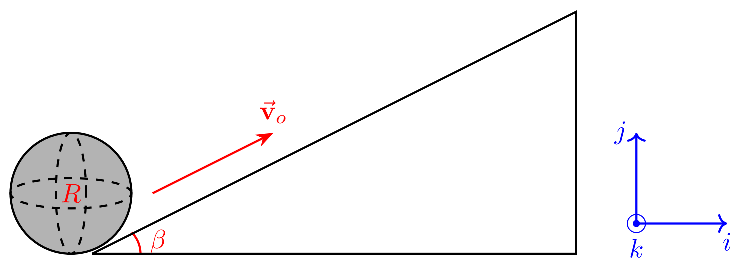
$$I = I_{CM} + MR^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}$$

Finalmente, considerando la condición de ligadura $R\vec{\alpha}=\ddot{\vec{\mathcal{R}}}$, resta resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} Mg - T = M\ddot{\mathcal{R}} \\ RMg = \dfrac{3MR^2\alpha}{2} \\ R\alpha = \ddot{\mathcal{R}} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\vec{\mathbf{T}} = \frac{1}{3}Mg\hat{\mathbf{j}}}, \ \boxed{\vec{\alpha} = \frac{2g}{3R}\hat{\mathbf{k}}}, \ \boxed{\ddot{\vec{\mathcal{R}}} = -\frac{2}{3}g\hat{\mathbf{j}}}$$

---

§§ Se lanza una esfera de radio **R** en cuesta arriba por un plano inclinado en un ángulo β como muestra la figura anexa. Si se lanza con rapidez $\mathbf{v}_o$ y rapidez angular ω_o, calcule, en función de β, el valor que debe tener el coeficiente de roce de la superficie del plano para que el centro de masa suba a velocidad constante mientras patina ¿Cuánto tiempo tarda en comenzar a rodar sin patinar en dicho caso?

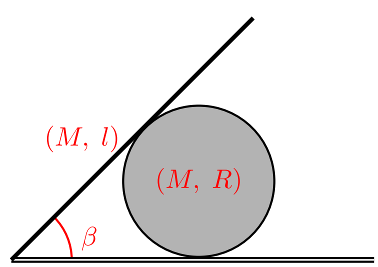


Guía del prof. Cayetano Di Bartolo, Ejercicio 20, Página 7

SOLUCIÓN

---

§§ Consideremos un sistema compuesto por una barra delgada de masa **M** y longitud **l** y un disco de radio **R** e igual masa, dispuestos como muestra la figura anexa. Calcule la fuerza que ejerce el disco sobre la barra suponiendo que todas las superficies son lisas y el ángulo β.



Propuesto por el prof. Hermann Albrecht, Verano 2019

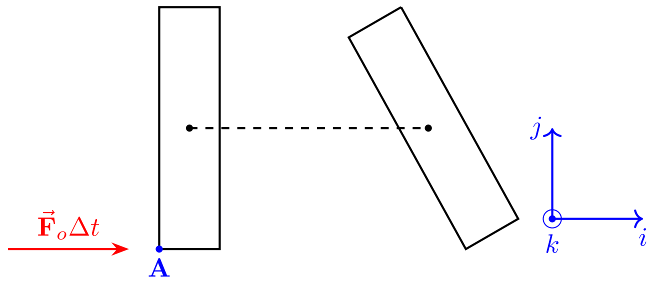
SOLUCIÓN

---

§§ Una barra de masa 10 Kg y largo 2 m colocada horizontalmente en una mesa sin fricción recibe un impulso de 100 $N.seg$ en su extremo inferior **A**.

a) Calcule la velocidad del centro de masas y la velocidad angular.

b) El trabajo de traslación y el trabajo de rotación. Explique quien los hace.



`Primer parcial, prof. Guillermo Donoso, 2020`

SOLUCIÓN

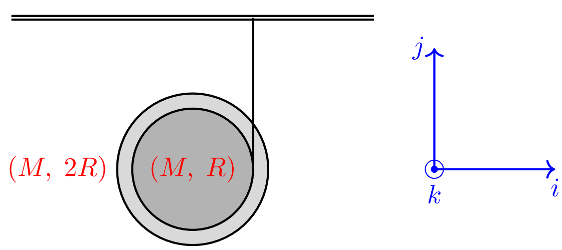
---

§§ Un yo-yo compuesto por dos discos de igual radio **2R** y un cilindro de radio **R**, cuelga del techo por una cuerda ideal. Si los tres objeto tienen misma masa **M** y no existe velocidad entre el yo-yo y la cuerda (la cuerda no desliza):

a) Calcule la aceleración traslacional del centro de masa, la aceleración angular y la tensión de la cuerda.

b) El trabajo de rotación y el trabajo de traslación debidos a la tensión.

c) Cuando llega al extremo de la cuerda recibe un impulso y regresa. Calcule numéricamente tal impulso (suponga que en este instante la velocidad del centro de masa es v_o) y la duración de este impulso.



`Primer parcial, prof. Guillermo Donoso, 2020`

SOLUCIÓN

---

§§ Considere una barra delgada de masa **M** y longitud **L**. La masa está distribuida de manera no uniforme a lo largo de la barra. La densidad lineal de masa en un punto de la barra está dada por la expresión $\lambda_{(s)} = (2M/L^2)s$, donde s es la distancia entre un punto sobre la barra y el extremo **A** de la barra. Si el extremo **A** está conectado a un eje horizontal que puede rotar libremente, determine:

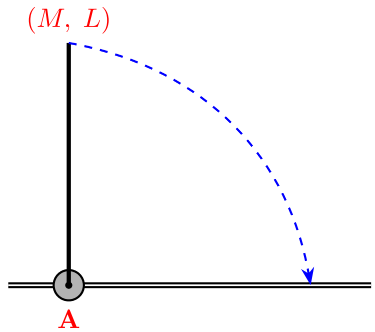
a) La energía mecánica total de la varilla.

b) La rapidez angular de la barra cuando llega al piso.

c) La aceleración angular.

d) La aceleración de su centro de masa, en términos de sus componentes horizontal y vertical.

e) La fuerza que ejerce el pasador sobre la barra.



Inspirado en la Guía del departamento, Ejercicio 4, Página 7

SOLUCIÓN

Primero que todo determinamos el CM tomando los ejes genéricos $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ y el momento de inercia del rígido respecto a su eje de rotación (el pasador, punto **A**).

Centro de masa Lo calculamos tomando la barra vertical y denotamos que su posición está en dirección radial. Consideramos una porción infinitesimal de masa dm a una distancia s del punto **A** y aplicamos la definición de CM para una distribución continua de masa.

$$\vec{\mathcal{R}} = R\hat{\mathbf{r}} = \frac{\int r dm}{\int dm}\hat{\mathbf{r}}, \quad \lambda_{(s)} = \frac{dm}{dl}, \quad l_{(s)} = s$$

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{\int_0^L s\lambda_{(s)} ds}{\int_0^L \lambda_{(s)} ds}\hat{\mathbf{r}} \Longrightarrow \vec{\mathcal{R}} = \frac{2}{3}L\hat{\mathbf{r}}$$

Momento de inercia Nuevamente, tomamos la barra vertical, consideramos una porción infinitesimal de masa dm a una distancia s perpendicular al punto **A** y aplicamos la definición para una distribución continua de masa.

$$I = \int (r_\perp)^2 dm, \quad \lambda_{(s)} = \frac{dm}{dl}, \quad l_{(s)} = s$$

$$I = \int_0^L s^2 \lambda_{(s)} ds \Longrightarrow I = \frac{1}{2}ML^2$$

Como la barra rota libremente, no existen fuerzas disipativas, y, por lo tanto, la energía mecánica se conserva a lo largo se su trayecto hasta el suelo. Tenemos entonces que la energía mecánica total, E, corresponde a la energía potencial que tiene el rígido en su posición inicial. Así,

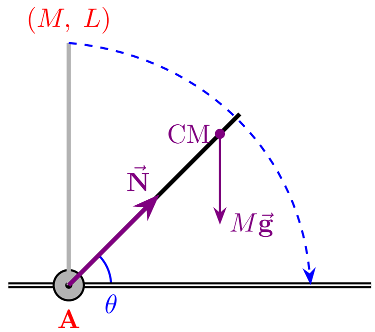
$$E = U_o + \cancel{K_o} = Mg\mathcal{R} \Longrightarrow \underbrace{\boxed{E = \frac{2}{3}MgL}}_{\text{Pregunta } a)}$$

Utilizamos conservación de la energía mecánica para determinar la rapidez angular, ω_f, de la barra cuando ésta llega al suelo.

$$U_o + \cancel{K_o} = K_f + \cancel{U_f} \Longrightarrow \frac{2}{3}MgL = \frac{1}{2}I(\omega_f)^2 + \frac{1}{2}M(\dot{\mathcal{R}}_f)^2, \quad \text{con } \dot{\mathcal{R}}_f = \omega_f \mathcal{R}$$

$$\frac{2}{3}MgL = \frac{1}{4}ML^2(\omega_f)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{2}{3}\omega_f L\right)^2 \Longrightarrow \underbrace{\boxed{\omega_f = \sqrt{\frac{24g}{17L}}}}_{\text{Pregunta } b)}$$

Para responder el resto del ejercicio, tomamos una posición genérica de la barra denotando el ángulo θ que forma con la vertical.



Rápidamente, observamos que al tomar torques respecto al punto **A**, sólo hace torque el peso y podemos calcular fácilmente la aceleración angular de la barra. Tomamos una posición genérica del CM de la barra definiendo el ángulo θ.

$$\vec{\mathbf{\Gamma}} = \vec{\tau}_{\text{peso}} = \vec{\mathcal{R}} \times M\vec{\mathbf{g}} = \frac{2}{3}L(\cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{j}}) \times Mg(-\hat{\mathbf{j}}) = I\vec{\alpha}$$

$$\underbrace{\boxed{\vec{\alpha}_{(\theta)} = -\frac{4g}{3L}\cos\theta\hat{\mathbf{k}}, \quad \text{con } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}}_{\text{Pregunta } c)}$$

Con $\vec{\alpha}$, podemos determinar la aceleración del CM. Consideramos las direcciones $\{\hat{\mathbf{i}},\ \hat{\mathbf{j}},\ \hat{\mathbf{k}}\}$ como $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

$$\ddot{\vec{\mathcal{R}}} = \vec{\alpha} \times \vec{\mathcal{R}} = -\frac{4g}{3L}\cos\theta\hat{\mathbf{k}} \times \frac{2}{3}L(\cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{j}})$$

$$\underbrace{\boxed{\ddot{\vec{\mathcal{R}}}_{(\theta)} = \frac{4}{9}g\begin{bmatrix}\operatorname{sen}(2\theta)\\ -2\cos^2\theta\\ 0\end{bmatrix}, \quad \text{con } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}}_{\text{Pregunta } d)}$$

Finalmente, aplicamos la segunda ley de Newton para determinar la normal.

$$\sum_{i}^{2}\vec{\mathbf{F}}_i^{\text{ext}} = \vec{\mathbf{N}} + M\vec{\mathbf{g}} = M\ddot{\vec{\mathcal{R}}} \Longrightarrow \vec{\mathbf{N}} = M(\ddot{\vec{\mathcal{R}}} - \vec{\mathbf{g}})$$

$$\underbrace{\boxed{\ddot{\vec{\mathcal{R}}}_{(\theta)} = -\frac{1}{9}Mg\begin{bmatrix}4\operatorname{sen}(2\theta)\\ 9 - 8\cos^2\theta\\ 0\end{bmatrix}, \quad \text{con } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}}_{\text{Pregunta } e)}$$

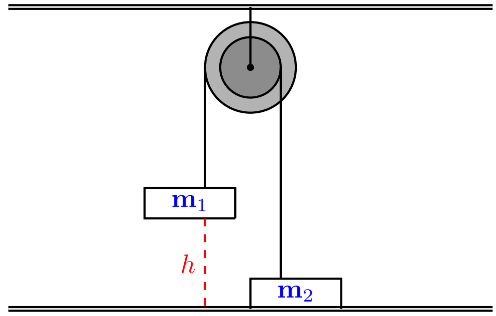
---

§§ Dos masas $m_1 > m_2$ están conectadas mediante cuerdas inextensibles a una polea doble constituida por dos discos rígidamente unidos, de masas **M** y **m** y radios $R > r$ respectivamente como indica la figura anexa. Inicialmente la masa $\mathbf{m_1}$ está a una altura **h** del piso, donde se apoya la masa $\mathbf{m_2}$. Cuando se suelta la masa m1, determine:

a) la aceleración angular de cada polea.

b) la aceleración lineal de cada masa.

c) la velocidad angular de cada polea cuando la masa $\mathbf{m_1}$ llega al piso.



Segundo parcial, prof. Hermann Albrecht, Verano 2019

SOLUCIÓN

---

§§ Un péndulo está constituido por una esfera sólida de radio **R** que se cuelga de un eje horizontal, a una distancia **L**, equivalente a la mitad de su radio, de su centro.

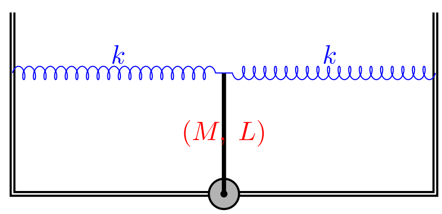
a) El período de este péndulo.

b) La longitud del péndulo simple equivalente.

SOLUCIÓN

---

§§ Para el sistema (una barra de densidad homogénea y dos resortes) mostrado en la figura, suponiendo que todas las superficies son lisas y que los resortes son lineales e idénticos, determine el periodo de las oscilaciones realizadas por el sistema en cuestión. La masa del sistema es **M** , su longitud es **L** y las constantes de los resortes son de valor **k**.

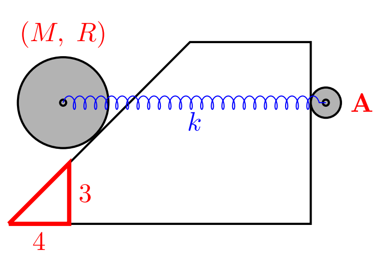


Segundo parcial, prof. Cayetano Di Bartolo, 2004

SOLUCIÓN

---

§§ Un disco de radio **R** y masa **M** descansa sobre una superficie inclinada y lisa tal como muestra la imagen anexa. El extremo de un resorte de constante **k** está unido al centro del disco y el otro extremo está unido al rodamiento en el punto **A**; permitiendo que el resorte permanezca horizontal, cuando el disco está en equilibro. Si la longitud del resorte sin deformar es $\mathbf{l}_o$, determine, de dos maneras distintas, su longitud máxima cuando el disco está en equilibrio.



Segundo parcial, prof. José Calatroni, 2012

SOLUCIÓN

---

§§ Dos ruedas tienen momentums de inercia $\mathbf{I}_1$ y $\mathbf{I}_2$ son puestos a rotar con velocidades angulares $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\omega}_2$. Cuando son compactados cara a cara, ellos rotan con la misma rapidez angular ω debido a las fuerzas de fricción. Determine ω y el trabajo realizado por tales fuerzas de fricción.

§§ Una cuerda está enrollada a un cilindro de masa $\mathbf{M}$ y radio $\mathbf{R}$ mediante una barra de masa despreciable. La barra es halada verticalmente hacia arriba para evitar que su centro de masa caiga mientras el cilindro cae desenrollándose. Determine

a) la tensión de la cuerda.

b) el trabajo realizado por el cilindro cuando éste adquiere una rapidez angular ω.

c) el largo de la cuerda sin desenrollar en el momento en que se alcanza la rapidez ω.

§§ Dos cuerdas están atadas a un cilindro, una en cada extremo, y al techo. El cilindro se mantiene horizontal (paralelo al techo) y tiene una longitud $\mathbf{L}$, radio $\mathbf{R}$ y masa $\mathbf{M}$. Si se suelta el cilindro, determine

a) la tensión de cada cuerda.

b) la aceleración del cilindro.

§§ Un tubo de largo $\mathbf{L}$ es llenado de un líquido incompresible de masa $\mathbf{M}$ y cerrado en ambos extremos. El tubo rota sobre un plano horizontal por uno de sus extremos con una rapidez angular ω. Demuestre que la fuerza que ejerce el líquido al otro lado del tubo es $||\vec{\mathbf{F}}|| = (1/2)m\omega^2 L$.

§§ Una esfera de densidad uniforme y radio $\mathbf{r}$, inicialmente en reposo en la cima de otra esfera de radio $\mathbf{R} > \mathbf{r}$, rueda sobre la superficie de tal esfera. Determine la velocidad en el instante cuando la esfera pequeña se separa de la mayor y el ángulo que forma con la vertical en ese instante.

§§ Una esfera de radio $\mathbf{a}$ oscila al fondo de un cilindro de radio $\mathbf{b} > \mathbf{a}$ en un plano horizontal. Si el cilindro de mantiene fijo y la esfera no desliza, determine el periodo de oscilaciones de la esfera debido a la aceleración de la gravedad.

4

Fuerzas Centrales

Parte III

Tercer Parcial

5

Hidroestática

6

Termodinámica